


3) Calcul tensoriel

①

3.1) Tenseurs fonctions d'une variable scalaire

Soit $T = T(t)$

↑ scalaire (ex: temps)

$$\frac{dT}{dt} \approx \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d(T + S)}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dS}{dt}$$

(2)

$$\frac{d[\lambda(T)]}{dt} = \frac{d\lambda}{dT} T + \lambda \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{d(TS)}{dt} = \frac{dT}{dt} S + T \frac{dS}{dt}$$

$$\frac{d(T\underline{a})}{dt} = \frac{dT}{dt} \underline{a} + T \frac{d\underline{a}}{dt}$$

$$\frac{d(T^*)}{dt} = \left(\frac{dT}{dt} \right)^T$$

Ex: Soit Q orthogonal,
montrer que $\left(\frac{dQ}{dt} \right) Q^T$ est antisym

(3)

sol: $Q Q^T = I$

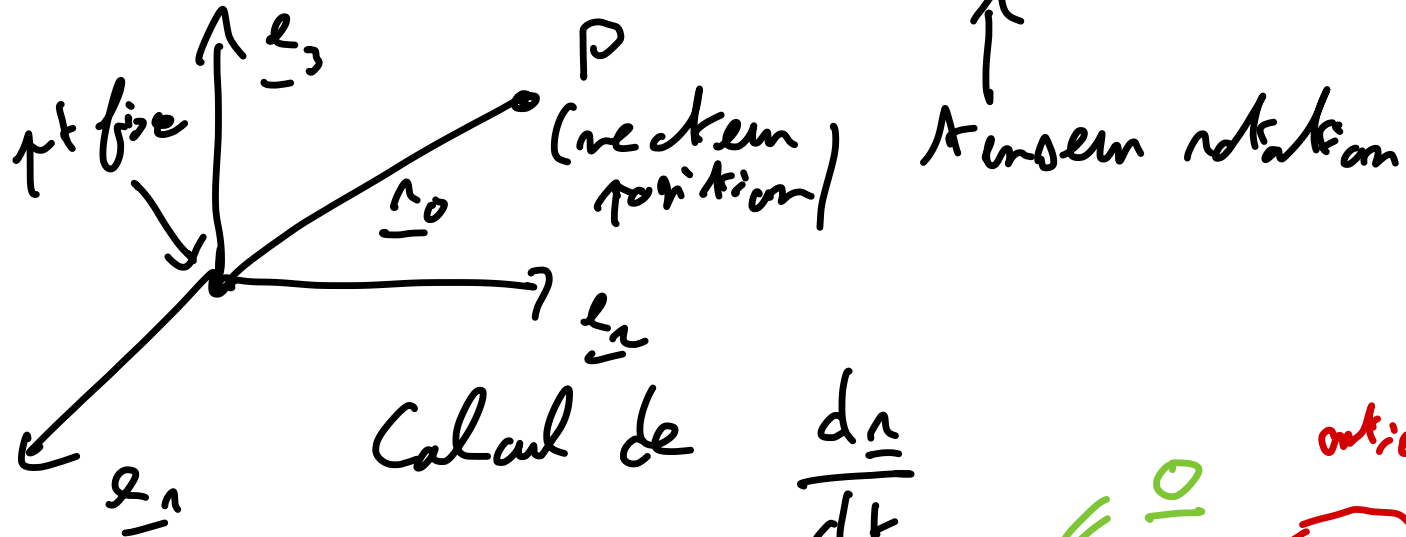
$$D'_{\text{en}} Q \frac{dQ^T}{dt} + \frac{dQ}{dt} Q^T = \frac{dI}{dt} = \underline{\underline{0}}$$

$$Q \frac{dQ^T}{dt} = - \frac{dQ}{dt} Q^T$$

$$\left(\frac{dQ}{dt} Q^T \right)^T$$

$$\therefore CQFD$$

Ex: Rotation de corps rigide autour (4)
 d'un pt: $\underline{r}(t) = R(t) \underline{r}_0$ ||



Calcul de $\frac{d\underline{r}}{dt}$

Sol: $\frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{dR}{dt} \underline{r}_0 + R \frac{d\underline{r}_0}{dt} = \frac{dR}{dt} R^T \underline{r}$

outrogo

$$\text{D'où } \frac{d\underline{r}}{dt} = \left(\frac{dR}{dt} R^T \right) \underline{r}$$

(5)

$$= \underline{\omega} \times \underline{r}$$

↑
correspondance entre kinematics rotation
et vectors axiaux

En cinématique des corps rigides, $\underline{\omega}$
est défini comme la vitesse angulaire.

3.2/ Champ scalaire, gradient d'une fonction scalaire (6)

Soit $\phi(\underline{r})$ une fonction à valeurs scalaire

$\uparrow$
pt de notre espace

$\phi(\underline{r}) \rightarrow$ un nombre scalaire

(ex: pression, température, densité, ...)

Def: le gradient de ϕ , désigné ⑦
par $\nabla \phi$ est le vecteur tel que

$$d\phi = \phi(\underline{a} + \underline{d_n}) - \phi(\underline{a}) \equiv \nabla \phi \cdot \underline{d_n}$$

$$\frac{d\phi}{\|\underline{d_n}\|} = \nabla \phi \cdot \frac{\underline{d_n}}{\|\underline{d_n}\|} = \nabla \phi \cdot \underline{e}$$

vecteur unitaire
dans la direction $\underline{d_n} = \underline{e}$

Notes: $\frac{d\phi}{\|d\underline{a}\|} = \nabla\phi \cdot \underline{e}$

(8)

Donc en particulier

$$\left(\frac{d\phi}{\|d\underline{a}\|} \right)_{\substack{\text{ds la} \\ \text{direction} \\ \underline{e}_1}} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \nabla\phi \cdot \underline{e}_1 = (\nabla\phi)_1$$

$$\left(\frac{d\phi}{\|d\underline{a}\|} \right)_{\substack{\underline{e}_2 \\ \text{ds la direction}}} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \nabla\phi \cdot \underline{e}_2 = (\nabla\phi)_2$$

et $\nabla\phi \cdot \underline{e}_3 = (\nabla\phi)_3$

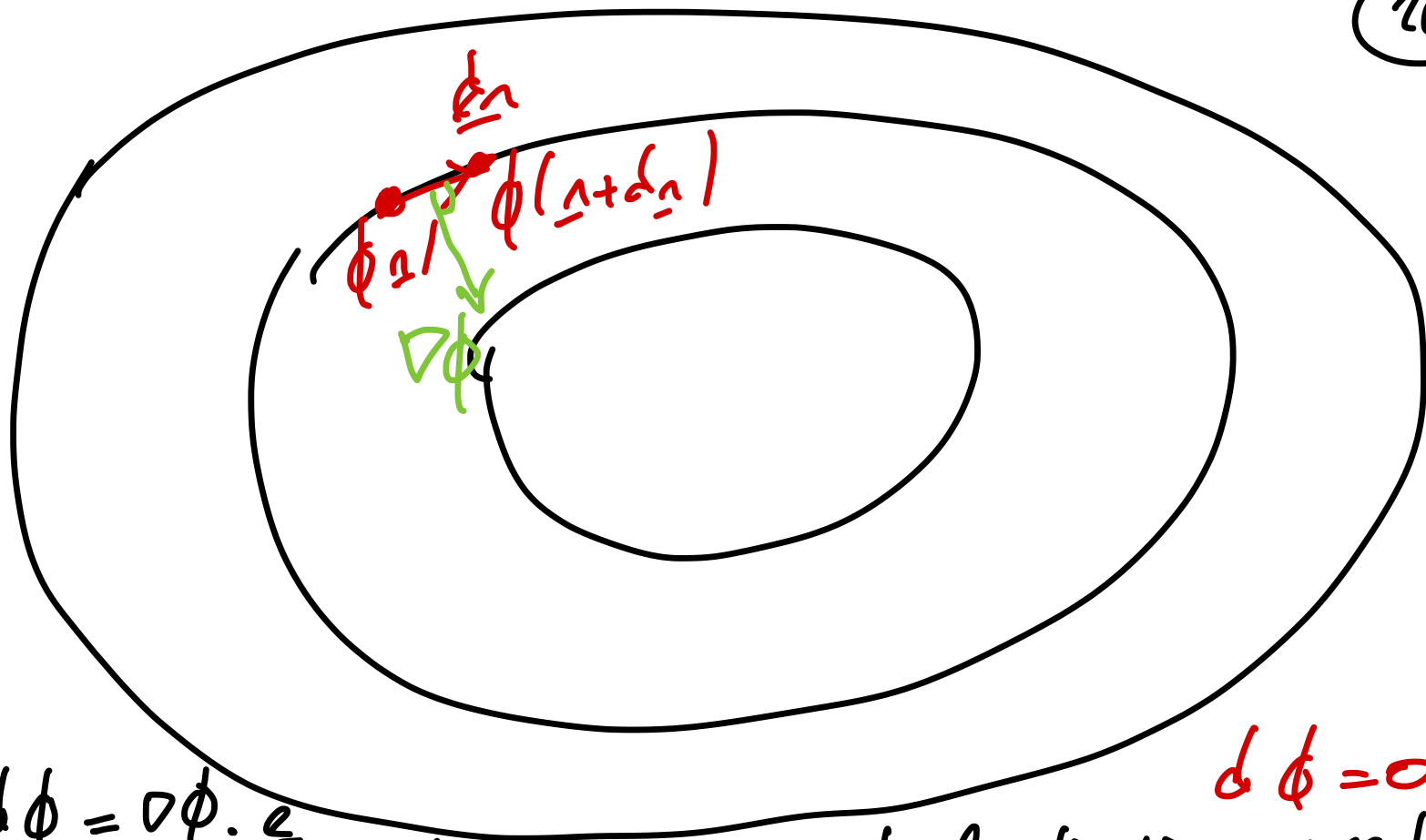
$$\nabla \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \underline{x}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \underline{x}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \underline{x}_3 \quad (9)$$

* Interpretation géométrique de $\nabla \phi$

Soit $\phi(\underline{x})$: altitude



10



$$d\phi = \nabla \phi \cdot \underline{e}$$

$d\phi$ est maximum ds les directions perpendiculaires
aux contours de ϕ est

$$d\phi = 0$$

Ex 1 : $\phi = x_1 x_2 + x_3$

(17)

Trouver un vecteur unitaire n normal
à la surface de ϕ constant passant
par le pt $(2, 1, 0)$

Sol : $\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \underline{e}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \underline{e}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \underline{e}_3$
 $= x_2 \underline{e}_1 + x_1 \underline{e}_2 + \underline{e}_3$

Am pt $(2, 1, 0)$ $\nabla \phi = \underline{e}_1 + 2 \underline{e}_2 + \underline{e}_3$

Donc $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\underline{e}_1 + 2 \underline{e}_2 + \underline{e}_3)$

* Ex 2

loi de Fourier

(12)

$$\vec{q} = -k \nabla \theta$$

flux de chaleur thermique
(vecteur)

conductivité thermique

champ de température

Demain en exercice

3.3) Champ vectoriel, gradient d'un
champ vectoriel.

13

Si $\underline{v}(\underline{a})$ est une fonction à valeur vecteur
de la position (ex: vitesse, déplacement,
accélération, ...)

le gradient de $\underline{v}$, noté par $\nabla \underline{v}$ est
un tenseur tel que

$$d\underline{v} = \underline{v}(\underline{a} + d\underline{a}) - \underline{v}(\underline{a}) \equiv (\nabla \underline{v}) d\underline{a}$$

avec $\underline{e} = \frac{d\underline{a}}{\|d\underline{a}\|}$

(14)

$$\left(\frac{d\underline{v}}{\|d\underline{a}\|} \right)_{d\underline{a} \text{ direction}} = |\nabla \underline{v}| \underline{e}$$

$$\text{Donc } \left(\frac{d\underline{v}}{\|d\underline{a}\|} \right)_{d\underline{a} \text{ direction}}^{\underline{e}} = |\nabla \underline{v}| \underline{e}_1$$

$$\begin{aligned} |\nabla \underline{v}|_{1,1} &= \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1 |\nabla \underline{v}| \underline{e}_1 = \underline{e}_1 \cdot \frac{\partial \underline{v}_1}{\partial x_1} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} (\underline{e}_1 \cdot \underline{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \end{aligned}$$

Em general, $(\nabla \underline{v})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$

(15)

$$[\nabla \underline{v}]_{(e_1, e_2, e_3)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

3.4/ Divergence d'un champ vectoriel (16)
et d'un champ tensoriel

(*) Soit $\underline{v}$ un champ vectoriel
 $\text{div } \underline{v} \equiv \text{tr} [\nabla \underline{v}]$ (scalaire)

So base $\{ \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \}$

$$\text{div } \underline{v} = \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \quad (\text{convention de sommation})$$

* Soit $T(\underline{a})$ un tenseur
du 2^{ème} ordre

(27)

La divergence de T est un vecteur
tel que

$$(\operatorname{div} T) \cdot \underline{a} \equiv \operatorname{div} [T^T \underline{a}] = \operatorname{tr} [T^T (\nabla \underline{a})]$$

$$\operatorname{div} T = \left(\frac{\partial T_{1m}}{\partial x_m}, \frac{\partial T_{2m}}{\partial x_m}, \frac{\partial T_{3m}}{\partial x_m} \right) \quad \forall \text{ vecteur } \underline{a}$$

$$(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) = \frac{\partial T_{im}}{\partial x_m} \underline{e}_i$$

3.5) Rotr d'un champ vectoriel

(18)

Soit $\underline{v}(r)$ un champ vectoriel,

noté $\underline{v}$ est un vecteur tel que

noté $\underline{v} \equiv 2 \underline{t}$ où $\underline{t}$ est le

vecteur axial correspondant
à la partie antisymétrique
de $\underline{\nabla v}$

En coordonnées cartésiennes

(19)

$$\text{rot } \underline{v} = 2\underline{e} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \underline{e}_1$$

$$+ \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \underline{e}_2$$

$$+ \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \underline{e}_3$$

4) Coordonnées curvilignes

25

Coordonnées polaires
Coordonnées cylindriques $(\underline{r}, \underline{\theta}, \underline{z})$
" " sphériques $(\underline{r}, \underline{\theta}, \underline{\phi})$

Utile pour exploiter des symétries

▽, div, rot pour ces systèmes de coordonnées ?

2a

de familiariser avec :

- Ex demain
- Document sur moodle des cours
- Wikipedia
- Questions . . .

Ex : f champ scalaire

$$(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_z) \quad \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r_1} \underline{r}_1 + \frac{1}{r_1} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{r}_2 + \frac{\partial f}{\partial r_z} \underline{r}_z$$